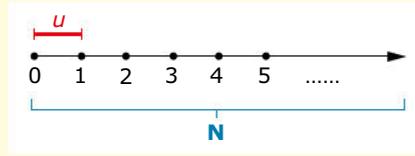




### Insieme **N** dei numeri naturali

È l'insieme costituito dai numeri 0, 1, 2, 3, 4, .....



### Le operazioni in **N** e le loro proprietà

Operazione	Proprietà	ESEMPI
Addizione	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interna a <b>N</b> (ossia la somma di due numeri naturali è sempre un numero naturale)</li> <li>• Commutativa <math>a + b = b + a</math></li> <li>• Associativa <math>(a + b) + c = a + (b + c)</math></li> <li>• Esiste l'elemento neutro <math>a + 0 = 0 + a = a</math></li> </ul>	$2 + 3 = 3 + 2$ $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$ $3 + 0 = 0 + 3 = 3$
Sottrazione	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Non</b> interna a <b>N</b></li> <li>• <b>Non</b> commutativa</li> <li>• <b>Non</b> associativa</li> <li>• Invariantiva: la differenza tra due numeri naturali non cambia se a entrambi si aggiunge o si toglie uno stesso numero (purché sia possibile effettuare la sottrazione in <b>N</b>) <math>a - b = (a + c) - (b + c)</math> <math>a - b = (a - c) - (b - c)</math></li> </ul>	$5 - 7$ non è eseguibile in <b>N</b> $3 - 2 \neq 2 - 3$ $(5 - 3) - 2 \neq 5 - (3 - 2)$ $7 - 4 = (7 + 3) - (4 + 3)$ $7 - 4 = (7 - 3) - (4 - 3)$ <b>Aggiungendo e sottraendo 3 ai due numeri</b>
Moltiplicazione	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interna a <b>N</b> (ossia il prodotto di due numeri naturali è sempre un numero naturale)</li> <li>• Commutativa <math>a \cdot b = b \cdot a</math></li> <li>• Associativa <math>(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)</math></li> <li>• Esiste l'elemento neutro <math>a \cdot 1 = 1 \cdot a = a</math></li> <li>• Distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione <b>a sinistra</b> <math>a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c</math> <b>a destra</b> <math>(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c</math></li> </ul>	$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$ $2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 2$ $2 \cdot (10 + 15) = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 15$ $(6 + 7) \cdot 8 = 6 \cdot 8 + 7 \cdot 8$
Divisione	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Non</b> interna a <b>N</b></li> <li>• <b>Non</b> commutativa</li> <li>• <b>Non</b> associativa</li> <li>• Distributiva a destra (ma <b>non</b> a sinistra!) rispetto all'addizione <math>(a + b) : c = a : c + b : c</math> (purché tutte le divisioni siano possibili in <b>N</b>)</li> <li>• Invariantiva: il quoziente di due numeri non cambia se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero diverso da 0 (purché la divisione sia possibile in <b>N</b>)</li> </ul>	$5 : 7$ non è eseguibile in <b>N</b> $4 : 2 \neq 2 : 4$ $(12 : 6) : 2 \neq 12 : (6 : 2)$ $(99 + 9) : 9 = 99 : 9 + 9 : 9$ $(99 : 9) = (99 \cdot 3) : (9 \cdot 3)$ $(99 : 9) = (99 : 3) : (9 : 3)$ <b>Moltiplicando e dividendo per 3 il dividendo e il divisore</b>

## Legge di annullamento del prodotto e sue conseguenze

### Legge di annullamento del prodotto

Il prodotto di due numeri  $a$  e  $b$  è uguale a zero se e solo se almeno uno dei due fattori è zero:

$$a \cdot b = 0 \quad \text{se e solo se} \quad a = 0 \text{ o } b = 0$$

#### Divisioni in cui il dividendo è zero

Hanno come risultato zero (purché il divisore sia diverso da zero).

##### ESEMPIO

$$0 : 11 = 0 \quad \text{perché} \quad 0 \cdot 11 = 0$$

#### Divisioni in cui il divisore è zero

Non sono definite.

##### ESEMPIO

$6 : 0$  non ha alcun significato: infatti, per la legge di annullamento del prodotto, non esiste alcun numero che, moltiplicato per 0, dà come risultato 6.

## Le potenze e le loro proprietà

Tipo di potenza	Definizione	ESEMPI
Potenza a esponente intero positivo maggiore di 1	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$	$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$ $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
Potenza a esponente 1	$a^1 = a$	$3^1 = 3$ $(-2)^1 = -2$
Potenza a esponente 0	$a^0 = 1$ , con $a \neq 0$	$3^0 = 1$ $(-2)^0 = 1$

Proprietà delle potenze	In simboli	ESEMPI
Prodotto di potenze aventi la stessa base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^{12} \cdot 2^8 = 2^{12+8} = 2^{20}$
Quoziente di potenze aventi la stessa base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^{12} : 2^8 = 2^{12-8} = 2^4$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$
Potenza di un prodotto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(5 \cdot 7)^2 = 5^2 \cdot 7^2$
Potenza di un quoziente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	$(8 : 2)^2 = 8^2 : 2^2$

### ATTENZIONE

- Una potenza di base 0 ed esponente positivo è sempre uguale a 0.  
Per esempio:  $0^5 = 0$ .
- Il simbolo  $0^0$  è indefinito.

# 1 B Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze in cui ti guidiamo a calcolare alcune potenze e ad applicare le proprietà delle potenze.

**1**  $7^3 \cdot 7^2 = 7^{\dots+\dots} = 7^{\dots}$        $7^{13} : 7^{11} = 7^{13-\dots} = 7^{\dots} = \dots$        $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot \dots} = 2^{\dots} = \dots$

**2**  $2^4 \cdot 2^2 = 2^{\dots+\dots} = 2^{\dots} = \dots$        $7^{13} : 7^{13} = 7^{\dots-\dots} = 7^{\dots} = \dots$        $(3^3)^4 = 3^{3 \cdot \dots} = 3^{\dots}$

**3** Completa la seguente tabella, inserendo Sì/No nella seconda colonna e inserendo l'eventuale risultato corretto nella terza colonna.

Uguaglianza	È corretta?	Eventuale correzione
$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3 \cdot 4} = 5^{12}$	No	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
$(4)^3 \cdot (3)^3 = (12)^3$	.....	.....
$(4)^6 \cdot (4)^8 = (4)^{14}$	.....	.....
$(4)^7 \cdot (4)^5 = (4)^{12}$	.....	.....
$(10^2)^{10} = (10^{10})^2$	.....	.....

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a semplificare alcune espressioni numeriche.

**4**

Passi del procedimento	Semplificare l'espressione: $24 : 2^2 \cdot 3 + 6^2 : 4 =$
Esegui prima le potenze.	$= 24 : \dots \cdot 3 + \dots : 4 =$
Esegui moltiplicazioni e divisioni, nell'ordine in cui compaiono.	$= \dots \cdot 3 + \dots =$
Esegui l'addizione.	$= \dots + \dots = \dots$

**5**

Passi del procedimento	Semplificare l'espressione: $\{[2^{15} : (2^3 \cdot 2^{10})] + 6\}^{10} : 10^8 =$
Esegui i calcoli dentro le parentesi tonde.	$= \{[2^{15} : 2^{\dots}] + 6\}^{10} : 10^8 =$
Esegui il calcolo dentro le parentesi quadre.	$= \{2^{\dots} + 6\}^{10} : 10^8 =$
Esegui il calcolo dentro le parentesi graffe e poi la divisione.	$= \dots^{10} : 10^8 = \dots$

## Problemi e modelli

**6** Completa la risoluzione del seguente problema.

Sara acquista un'auto che costa 16 700 euro, da cui le vengono scontati 2200 euro per il ritiro della sua vecchia auto. Potrebbe pagare in un'unica soluzione, ma questo la obbligherebbe a rinunciare ad altri acquisti, oppure in 54 rate da 306 euro l'una. In quest'ultimo caso, quale somma dovrebbe pagare in più?

### Soluzione

Qual è la cifra che deve pagare Sara per l'acquisto dell'auto in un'unica soluzione?

.....

Quale cifra dovrebbe versare complessivamente Sara se pagasse a rate?

.....

Esegui l'operazione necessaria a calcolare quanto pagherebbe in più nel secondo caso:

.....

[2024 euro]

**1** Completa la seguente tabella.

Operazione	Trasformazione	Risultato	Proprietà applicata
$27 + 12 + 33$	$27 + 33 + 12$	.....	.....
$58 - 23$	$55 - 20$	.....	.....
$37 \cdot 2 \cdot 5$	$37 \cdot 10$	.....	.....
$21 \cdot (10 + 15)$	$210 + 315$	.....	.....
$8 \cdot 11 \cdot 25$	$8 \cdot 25 \cdot 11$	.....	.....
$45 \cdot 11$	$450 + 45$	.....	.....

Completa inserendo il simbolo corretto (<, =, >).

- 2**  $2^6$  .....  $4^3$                        $3^2$  .....  $2^3$                        $5^3$  .....  $12^2$
- 3**  $12^0$  .....  $10^0$                        $13^1$  .....  $18^1$                        $100^3$  .....  $1000^2$
- 4**  $9^3$  .....  $27^2$                        $3 \cdot 4^2$  .....  $3^2 \cdot 4$                        $2^3 \cdot 3^2$  .....  $2 \cdot 6^2$
- 5**  $2^2 \cdot 3^2$  .....  $6^5 : 6^3$                        $3^0 \cdot 3^3$  .....  $12^5 : 6^5$                        $(10^2)^3$  .....  $2^5 \cdot 5^5$

Calcola il valore delle seguenti espressioni in **N** applicando, dove possibile, le proprietà delle potenze.

- 6**  $[20 - (36 : 9 + 10 : 2 - 2^2) - (5^2 - 2 \cdot 2^3)]^2 : 6 - 1$  [5]
- 7**  $\{[3 + 6 \cdot (2 + 2^2)] : 3 + 30 : 5 - 6 : 2\} : 4$  [4]
- 8**  $[(2^6 \cdot 2^2)^2 : (2^5)^3]^3 - 1$  [7]
- 9**  $[(3^8 : 3^6)^4 : (3^2)^3]^2 - 3^4$  [0]
- 10**  $[(2^{12} : 2^{10})^4 : (2^3)^2]^2 - 2^0$  [15]
- 11**  $2^7 \cdot (2^5)^2 : (2^4)^4 + 3^9 \cdot (3^2)^3 : (3^4)^3$  [29]
- 12**  $[(16 : 8 : 2)^3 \cdot (24 : 6 : 2)^4 \cdot 2^7] : (2^3)^2$  [32]
- 13**  $(16^4 : 8^3) : 2^4 + 27^2 : 81$  [17]
- 14**  $\{[36 : (6 : 2)]^3 \cdot 12^4\} : (12^3)^2 - [(36 : 6 : 2)^3 \cdot 3^4] : (3^2)^3$  [9]

### Problemi e modelli

- 15** All'inizio di giugno 2008 la popolazione italiana era di 59 798 184 abitanti. Durante il mese di giugno si sono avuti: 45 414 nati, 43 341 morti, 144 002 immigrati, 114 549 emigrati. Qual era la popolazione italiana alla fine di giugno? [59 829 710]
- 16** Vorrei comprare una videocamera che è possibile pagare in contanti, al prezzo di 1199 euro, oppure in 12 rate da 109 euro l'una. Quanto spenderei in più se la acquistassi a rate? [109 euro]
- 17** Per preparare in tre settimane l'esame di storia, Luca deve studiare un libro di 432 pagine. Decide di farne quattro letture: alla prima dedicherà 8 giorni, alla seconda 6, alla terza 4 e alla quarta i restanti giorni. Quante pagine dovrà leggere in ciascun giorno? [Prima lettura: 54; seconda lettura: 72; terza lettura: 108; quarta lettura: 144]
- 18** Per preparare la pasta sfoglia si pone uno strato di burro tra due di pasta, ottenendo così tre strati, poi si lascia riposare il tutto per un po' e, a intervalli regolari, lo si ripiega in tre ottenendo ogni volta il triplo del numero degli strati. Se si facessero 5 ripiegamenti, quanti strati si otterrebbero? [ $3^6 = 729$ ]



## Multipli e divisori

### Divisore e multiplo

Dati due numeri naturali  $a$  e  $b$ , si dice che  $a$  è multiplo di  $b$ , se esiste un numero naturale  $q$ , tale che  $a = q \cdot b$ . In tal caso si dice che « $b$  è un divisore di  $a$ » oppure che « $b$  divide  $a$ » oppure che « $a$  è divisibile per  $b$ ».

#### ESEMPIO

$20 = 5 \cdot 4 \Rightarrow 20$  è multiplo di 5 e di 4  $\Rightarrow$  5 e 4 sono divisori di 20  
20 è divisibile per 5 e per 4

### Numero primo

Ogni numero naturale maggiore di 1 che è divisibile soltanto per se stesso e per 1.

#### ESEMPI

I primi 10 numeri primi sono:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

### Scomposizione in fattori primi

Scrittura di un numero naturale come prodotto di numeri primi o di loro potenze.

#### ESEMPIO

$540 = 54 \cdot 10 = \underbrace{2 \cdot 27}_{54} \cdot \underbrace{2 \cdot 5}_{10} = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$   
Scomposizione in fattori primi di 540

### Massimo comune divisore (M.C.D.)

Dati due o più numeri naturali diversi da zero, è il più grande fra i loro divisori comuni.

#### ESEMPIO

I divisori di 4 sono: 1, 2, 4.

I divisori di 10 sono: 1, 2, 5, 10.

I più grande divisore comune tra 4 e 10 è 2:

M.C.D. (4, 10) = 2

### Numeri primi fra loro (o coprimi)

Due numeri naturali tali che il loro massimo comune divisore è uguale a 1.

#### ESEMPI

Sono coprimi:

6, 7

perché

M.C.D.(6, 7) = 1

Non sono coprimi:

6, 8

perché

M.C.D.(6, 8) = 2

### Minimo comune multiplo (m.c.m.)

Dati due o più numeri naturali diversi da zero, è il più piccolo fra i multipli comuni diversi da zero.

#### ESEMPIO

I multipli di 2 (diversi da zero) sono:

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

I multipli di 3 (diversi da zero) sono:

3, 6, 9, 12, 15, 18, ...

Il più piccolo multiplo comune tra 2 e 3 è 6:

m.c.m.(2, 3) = 6

## Criteri di divisibilità

Un numero è divisibile ...	... se e solo se	ESEMPI numeri divisibili	ESEMPI numeri non divisibili
per 2	lo è la sua ultima cifra	12; 344; 1028	13; 347; 1029
per 3 o per 9	lo è la somma delle sue cifre	4455 è divisibile per 3 e per 9 (4 + 4 + 5 + 5 = 18)	157 né per 9 né per 3 (1 + 5 + 7 = 13)
per 5	termina con 0 o con 5	340; 1005	4001; 1003
per 4 o per 25	lo è il numero formato dalle ultime due cifre a destra, o se termina con due zeri	3124 è divisibile per 4 175 è divisibile per 25 5200 è divisibile per 4 e per 25	117; 210 (né per 4 né per 25)
per 11	la differenza tra la somma delle cifre di posto <b>dispari</b> e la somma delle cifre di posto <b>pari</b> , contate a partire da destra, è divisibile per 11	143 (3 + 1 - 4 = 0, e 0 è divisibile per 11)  5709 (9 + 7 - 0 - 5 = 11)	531 (1 + 5 - 3 = 3)  11111 (1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 1)

## Procedimento per il calcolo del massimo comune divisore

Si scompongono i numeri dati in fattori primi e si considera il prodotto dei fattori primi comuni a tutti i numeri assegnati, presi una sola volta, ciascuno con il *minimo* esponente con cui figura nelle scomposizioni.

### ESEMPIO

Calcoliamo il M.C.D. tra 360 e 378.

$$\text{M.C.D.}(360, 378) = \text{M.C.D.}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7) = 2^1 \cdot 3^2 = 18$$

il minimo è 2  
il minimo è 1  
2 e 3 sono i soli fattori primi in comune alle due scomposizioni

## Procedimento per il calcolo del minimo comune multiplo

Si scompongono i numeri dati in fattori primi e si considera il prodotto dei fattori primi comuni e non comuni a tutti i numeri assegnati, presi una sola volta, ciascuno con il *massimo* esponente con cui figura nelle scomposizioni.

### ESEMPIO

Calcoliamo il m.c.m. tra 54 e 180.

$$\text{m.c.m.}(54, 180) = \text{m.c.m.}(2^1 \cdot 3^3, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 540$$

il massimo è 3  
il massimo è 2  
2, 3 e 5 sono i fattori primi comuni e non comuni che compaiono nelle due scomposizioni

# 2 B Esercizi guidati

Completa le seguenti scomposizioni in fattori primi.

- 1**  $126 = 2 \cdot 3^{\dots} \cdot \dots$
- 2**  $128 = 2^{\dots}$
- 3**  $129 = 3 \cdot \dots$
- 4**  $120 = 2^{\dots} \cdot 3 \cdot \dots$
- 5**  $130 = 2 \cdot \dots \cdot \dots$
- 6**  $140 = 2^{\dots} \cdot \dots \cdot 7$
- 7**  $192 = 2^{\dots} \cdot 3$
- 8**  $102 = \dots \cdot \dots \cdot 17$

Completa i seguenti esercizi in cui ti guidiamo a calcolare il M.C.D. e il m.c.m.

- 9** I divisori di 8 sono 1, 2, ..., 8; i divisori di 20 sono 1, 2, ..., ..., 10, 20. Quindi i divisori comuni di 8 e 20 sono ..... e il loro massimo comune divisore è .....
- 10** I multipli (diversi da zero) di 6 sono 6, 12, ..., 24, ..., 36, ...; i multipli di 4 sono 4, 8, ..., 16, 20, ..., 28, .... Quindi i multipli comuni di 6 e 4 sono ..... e il loro minimo comune multiplo è .....
- 11** Si ha  $45 = 3^{\dots} \cdot 5$  e  $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^{\dots}$ , quindi  
M.C.D.(45, 150) =  $3 \cdot \dots = \dots$  e m.c.m.(45, 150) =  $2 \cdot 3^{\dots} \cdot 5^{\dots} = \dots$
- 12** Si ha  $250 = 2 \cdot 5^{\dots}$  e  $200 = 2^{\dots} \cdot 5^2$ , quindi  
M.C.D.(250, 200) =  $2 \cdot 5^{\dots} = \dots$  e m.c.m.(250, 200) =  $2^{\dots} \cdot 5^{\dots} = \dots$
- 13** Completa la tabella, inserendo Sì/No a seconda che il numero sia divisibile per quello indicato in cima alla colonna. La prima riga è svolta come esempio.

Numero	È divisibile per ...						
	2	3	4	5	9	11	25
1245	No, perché l'ultima cifra è dispari	Sì, perché la somma delle cifre è 12, divisibile per 3	No, perché non lo è 45	Sì, perché termina con 5	No, perché la somma delle cifre è 12, che non è divisibile per 9	No, perché $5 + 2 - 4 - 1$ non è divisibile per 11	No, perché non lo è 45
6699	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
9482	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

## Problemi e modelli

Completa la risoluzione dei seguenti problemi.

- 14** Con 120 caramelle al miele, 150 alla frutta e 160 al cioccolato, si deve confezionare il maggior numero possibile di scatole che ne contengano una stessa quantità di ogni tipo (senza avanzare alcuna caramella). Quante sono le scatole e qual è la loro composizione?

**Soluzione**

Il numero di scatole da realizzare corrisponde al M.C.D. tra .....  
ed è uguale a .....

Calcola il numero di caramelle di ogni tipo per ciascuna scatola.

[12, 15, 16]

- 15** I traghetti per l'isola d'Elba, la Corsica e la Spagna partono dal porto di Genova. Il traghetto per l'isola d'Elba parte ogni 5 ore, quello per la Corsica ogni 12 ore e quello per Barcellona ogni 22 ore. Sapendo che il 15 giugno i traghetti per le tre destinazioni sono partiti alle 8, dopo quanti giorni ripartiranno contemporaneamente?

**Soluzione**

I traghetti per le tre destinazioni ripartiranno contemporaneamente per la prima volta dopo un tempo (in ore) che corrisponde al m.c.m. tra ..... Tale m.c.m. è uguale a ..... e corrisponde a ..... giorni e ..... ore.

[27 giorni e 12 ore]

Stabilisci se i seguenti numeri sono primi.

**1**  $2^0 - 1$      $2^1 - 1$      $2^2 - 1$      $2^3 - 1$     **2**  $2^4 - 1$      $2^5 - 1$      $2^6 - 1$      $2^7 - 1$

**3** Scomponi in fattori primi le seguenti potenze:

$270^4$      $2160^3$      $15\,600^2$     [ $2^4 \cdot 3^{12} \cdot 5^4$ ;  $2^{12} \cdot 3^9 \cdot 5^3$ ;  $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13^2$ ]

**4** Completa la seguente tabella inserendo in ogni casella Sì/No a seconda che il numero sia divisibile o meno per quello in cima alla colonna.

Numero	È divisibile per ...							
	2	3	4	5	6	9	10	11
150	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
280	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
1342	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
3300	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
432	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

**5** Scomponi in fattori primi i seguenti numeri naturali: 135; 108; 132; 180; 1100; 1111.

Determina il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di numeri.

**6** 125, 20, 30    [M.C.D. = 5, m.c.m. = 1500]    **8** 35, 49, 70    [M.C.D. = 7, m.c.m. = 490]

**7** 81, 51, 21    [M.C.D. = 3, m.c.m. = 9639]    **9** 10, 110, 1100 [M.C.D. = 10, m.c.m. = 1100]

**10** Le seguenti coppie sono formate da numeri primi tra loro? 456 e 475    243 e 253

### Problemi e modelli

**11** Da un telo di stoffa rettangolare che ha dimensioni di 220 cm e 120 cm si vogliono ritagliare fazzoletti quadrati della maggiore area possibile, senza avanzare stoffa. Quanti quadrati si possono ottenere e quanto è lungo il loro lato? [66 fazzoletti di 20 cm di lato]

**12** Tre agenti, Aldo, Bruno e Carlo, si ritrovano a Roma il 19 aprile. Se Aldo va a Roma ogni 12 giorni, Bruno ogni 15 e Carlo ogni 20, dopo quanti giorni si ritroveranno a Roma? Quale giorno sarà? [60 giorni; 18 giugno]

**13** Le luci di un albero di Natale si accendono a intermittenza: quelle gialle ogni 6 secondi, quelle rosse ogni 10 secondi e quelle azzurre ogni 12 secondi. Se all'inizio sono accese tutte insieme, dopo quanti secondi lo saranno ancora? [60 secondi]

**14** Individua quale dei seguenti numeri potrebbe rappresentare il numero di tutti i giocatori titolari delle squadre di pallavolo partecipanti a un torneo estivo, sapendo che ogni squadra è composta da tre difensori, due attaccanti e un alzatore:

- [A] 1234    [B] 1533    [C] 1236    [D] 1228

**15** Francesco vuole sostituire le vecchie piastrelle del bagno sul pavimento e sulle due pareti verticali libere da porte, finestre e sanitari. Vuole che le piastrelle nuove siano tutte uguali e quadrate; inoltre ne vuole acquistare il minimo numero possibile e desidera effettuare il lavoro senza tagliare alcuna piastrella. La stanza è alta 336 cm, larga 210 cm e lunga 360 cm. Le pareti interessate dai lavori sono due adiacenti entrambe alte 336 cm, ma una lunga 360 cm e l'altra 210 cm.

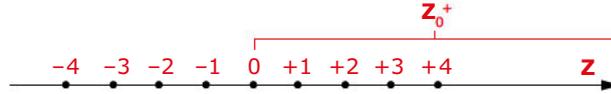
a. Quale sarà la lunghezza del lato delle nuove piastrelle? Quante ne ordinerà?

b. E se invece volesse piastrellare il pavimento con un tipo di piastrelle quadrate e le due pareti verticali con un secondo tipo di piastrelle quadrate, sempre con l'intenzione di acquistarne il minimo numero possibile e di potere effettuare il lavoro senza tagliare alcuna piastrella?

- [a. 6 cm, ne servono 7420;  
b. 5320 piastrelle di lato 6 cm per le pareti e 84 piastrelle di lato 30 cm per il pavimento]

### Insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

Insieme costituito dal numero zero e da tutti i numeri che si ottengono associando a ciascun numero naturale due numeri, uno **positivo** preceduto dal segno + e uno **negativo** preceduto dal segno -.



### Numeri concordi e discordi

Due numeri interi che hanno lo stesso segno si dicono **concordi**; due numeri interi con segni diversi si dicono **discordi**.

**ESEMPI**

$-3$  e  $+5$   
sono discordi

$-3$  e  $-2$   
sono concordi

### Valore assoluto

Sia  $a$  un numero intero. Il valore assoluto di  $a$  si indica con il simbolo  $|a|$  ed è così definito

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

**ESEMPI**

$$|+5| = +5 \quad |-3| = -(-3) = +3$$

Poiché il segno + negli interi positivi viene spesso omissso si può scrivere anche:

$$|+5| = 5 \quad |-3| = 3$$

### Numeri opposti

Due numeri interi che hanno lo stesso valore assoluto ma segno opposto.

**ESEMPIO**

$-3$  e  $+3$  sono due numeri opposti.

## Operazioni in $\mathbf{Z}$

Come calcolare...	Segno	Valore assoluto	ESEMPI
... la somma di due interi concordi	è uguale a quello dei due addendi	è uguale alla <i>somma</i> dei valori assoluti dei due addendi	$(-4) + (-5) = -(4 + 5) = -9$ segno uguale a quello dei due addendi valore assoluto uguale alla somma dei valori assoluti dei due addendi
... la somma di due interi discordi	è uguale a quello dell'addendo che ha valore assoluto maggiore	è uguale alla <i>differenza</i> fra il valore assoluto maggiore e quello minore dei due addendi	$(+2) + (-4) = -(4 - 2) = -2$ segno uguale a quello di $-4$ che, fra i due addendi, è quello di valore assoluto maggiore valore assoluto uguale alla differenza dei valori assoluti dei due addendi
... il prodotto di due interi	è + se i due numeri sono <i>concordi</i> , è - se sono <i>discordi</i>	è uguale al <i>prodotto</i> dei valori assoluti dei due numeri	$(-3) \cdot (-7) = +(3 \cdot 7) = +21$ segno + perché i due fattori sono concordi prodotto dei valori assoluti dei due fattori
... il quoziente di due interi (divisibili in $\mathbf{Z}$ )	è + se i due numeri sono <i>concordi</i> , è - se sono <i>discordi</i>	è uguale al <i>quoziente</i> dei valori assoluti dei due numeri	$(-16) : (+4) = -(16 : 4) = -4$ segno - perché i due numeri sono discordi quoziente dei valori assoluti dei due numeri

Le potenze con esponente positivo o nullo sono definite nell'insieme dei numeri interi in modo analogo a quanto visto in  $\mathbf{N}$ ; continuano inoltre a valere le stesse proprietà delle potenze.

# 3 B Esercizi guidati

**1** Completa le seguenti frasi in modo che risultino corrette. Alcuni completamenti sono eseguiti come esempio.

- a. Il valore assoluto di  $-7$  è **7**
- b. Il valore assoluto  $-8$  è .....
- c. Il valore assoluto di  $+9$  è .....
- d. I due numeri  $-10$  e  **$+10$**  sono opposti
- e. I due numeri  $+6$  e ..... sono opposti

**Completa i seguenti calcoli.**

**2**  $|-6 + 18| : |-2 - 4| = | + 12| : |.....| = 12 : ..... = .....$

**3**  $(|-3| \cdot |-2| + |-4|) : | + 2| = (3 \cdot ..... + 4) : ..... = ..... : ..... = .....$

**Completa le seguenti uguaglianze in cui ti guidiamo a svolgere calcoli tra numeri relativi.**

**4**  $-2 + (-3) - (-3) = -2 - ..... + ..... = .....$        $-5 - (+7) - (-6) = -5.....7.....6 = .....$

**5**  $(-2) \cdot (-3) \cdot (+3) = (+.....) \cdot (+3) = .....$        $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) = (-.....) \cdot (-4) = +.....$

**6**  $(-30) : (-15) : (-2) = (+.....) : (-2) = .....1$        $(-100) : (-20) : (-5) = (.....5) : (-5) = -.....$

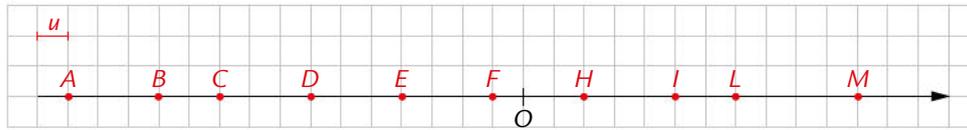
**Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a semplificare alcune espressioni numeriche.**

<b>7</b> Passi del procedimento	Semplificare l'espressione:
	$2 \cdot (-3)^2 : 6 - (-2)^2 \cdot (-3) + 10 - 9 + (-88) : (-11) : (-4) =$
Esegui le potenze.	$= 2 \cdot (+9) : 6 - (.....) \cdot (-3) + 10 - 9 + (-88) : (-11) : (-4) =$
Esegui moltiplicazioni e divisioni, nell'ordine in cui compaiono.	$= 18 : 6 - (.....) + 10 - 9 + (+.....) : (-4) =$
Esegui le divisioni rimaste.	$= 3 - (.....) + 10 - 9 + (.....) =$
Esegui la somma algebrica rimasta.	$= 3 + ..... + 10 - 9 - ..... = .....$

<b>8</b> Passi del procedimento	Semplificare l'espressione:
	$[(-2)^4]^3 : [(-2)^3 \cdot (-2)^7] + [(-2)^5]^2 : [(-2)^8 \cdot (-2)^2] =$
Applica la proprietà della potenza di potenza.	$= (-2)^{12} : [(-2)^3 \cdot (-2)^7] + (-2)^{10} : [(-2)^8 \cdot (-2)^2] =$
Applica la proprietà del prodotto di potenze con la stessa base.	$= (-2)^{12} : (-2)^{10} + (-2)^{10} : (-2)^{10} =$
Applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.	$= (-2)^{12-10} + (-2)^{10-10} =$
Calcola le potenze.	$= ..... + ..... = .....$

<b>9</b> Passi del procedimento	Semplificare l'espressione:
	$[(-3)^5]^3 : [(-3)^3 \cdot (+3)^8] =$
Osserva che è possibile riscrivere l'espressione in forma equivalente in modo che tutte le potenze abbiano la stessa base, così da poter utilizzare le proprietà delle potenze.	$= [(-3)^5]^3 : [(-3)^3 \cdot (-3)^8] =$
Applica la proprietà della potenza di potenza e del prodotto di potenze con la stessa base.	$= (-3)^{15} : (-3)^{11} =$
Applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.	$= (-3)^{15-11} =$
Calcola la potenza.	$= .....$

1 Scrivi i numeri corrispondenti ai punti indicati sulla retta orientata.



2 Completa la seguente tabella.

Numero	-12	+30	0	-67	-1	+1	+32	-3	+4
Valore assoluto	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Completa inserendo il simbolo corretto (<, =, >).

- 3  $-15 \dots +8$                        $+76 \dots +60$
- 4  $-8 \dots -12$                        $-9 \dots +9$
- 5  $0 \dots +7$                            $-23 \dots 0$
- 6  $+11 \dots +101$                        $-26 \dots -203$
- 7  $-13 \dots -28$                        $+16 \dots -20$
- 8  $-12 \dots -12$                        $-23 \dots +23$

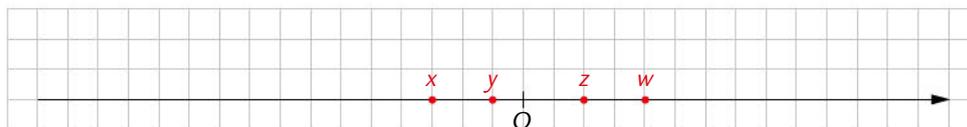
Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni.

- 9  $9 + (-52) + (+76) + (-14) + (-9) + (+50)$  [60]
- 10  $(-37) + (+87) + (+29) + (+37) + (-56)$  [60]
- 11  $(12 - 23 + 18) + (9 - 18 + 24) - (36 - 25 + 17)$  [-6]
- 12  $(-43 + 35 + 13) - (23 - 28 - 19 + 12) + (6 - 35 + 12)$  [0]

Completa le seguenti uguaglianze.

- 13  $(-23) + (\dots) = +18$        $(\dots) + (+11) = -21$
- 14  $(-45) + (\dots) = -12$        $(\dots) + (-18) = -19$
- 15  $(-23) - (\dots) = +15$        $(\dots) - (+13) = -17$
- 16  $(-54) - (\dots) = -18$        $(\dots) - (-25) = -19$

17 Sulla retta reale sono rappresentati i numeri  $x, y, z$  e  $w$ . Inserisci sulla stessa retta i numeri:  $2x, 2w, -3z, x - y, x - z, z + w$ .



Completa le seguenti tabelle.

18

$a$	0	-1	+23	-15	-30	+25	-64	+41	+17	-80	+35	1
$b$	-7	98	+20	-16	+27	-36	0	-10	-1	-54	1	-59
$a \cdot b$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....



#### Frazione e frazione ridotta ai minimi termini

Siano  $a$  e  $b$  numeri naturali con  $b \neq 0$ ; si dice frazione una espressione del tipo  $\frac{a}{b}$  che indica il quoziente esatto della divisione tra  $a$  e  $b$ . Se il massimo comune divisore tra  $a$  e  $b$  è 1, la frazione si dice **ridotta ai minimi termini**.

**ESEMPI**

Sono frazioni ridotte ai minimi termini:

$$\frac{5}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{7}{9}$$

**Non** sono frazioni ridotte ai minimi termini:

$$\frac{15}{3} \quad \frac{24}{8} \quad \frac{12}{9}$$

#### Frazioni equivalenti

Due frazioni  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  si dicono equivalenti, e si scrive  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , se e solo se  $a \cdot d = b \cdot c$

**ESEMPI**

Sono equivalenti:

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{15}{20}$$

$3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$

**Non** sono equivalenti:

$$\frac{3}{4} \text{ e } \frac{9}{16}$$

$3 \cdot 16 \neq 4 \cdot 9$

#### Confronto di frazioni

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

rispettivamente a seconda che:

$$ad < bc \quad ad = bc \quad ad > bc$$

**ESEMPI**

$$\frac{5}{4} > \frac{8}{7} \text{ perché } 5 \cdot 7 > 8 \cdot 4$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} \text{ perché } 3 \cdot 5 < 4 \cdot 4$$

#### Proprietà invariante

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

$n$  deve essere divisore di  $a$  e di  $b$

**ESEMPI**

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{20}{12} \quad \frac{81}{12} = \frac{81 : 3}{12 : 3} = \frac{27}{4}$$

### Metodi per esprimere una frazione in forma decimale e viceversa

Obiettivo	Metodo	ESEMPI
Trasformare una frazione in un numero decimale	Si esegue la divisione tra numeratore e denominatore.	$\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1,75$
Trasformare un numero decimale finito in frazione	Si scrive una frazione che ha: <ul style="list-style-type: none"> <li>al numeratore il numero scritto senza la virgola;</li> <li>al denominatore un 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola.</li> </ul>	$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ $5,4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$
Trasformare un numero decimale periodico in frazione	Si scrive una frazione che ha: <ul style="list-style-type: none"> <li>per numeratore la differenza fra il numero scritto senza la virgola e la parte che viene prima del periodo;</li> <li>per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (se c'è).</li> </ul>	$1,\overline{3} = \frac{13 - 1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $0,10\overline{5} = \frac{105 - 10}{900} = \frac{95}{900} = \frac{19}{180}$

## Proporzione

È un'uguaglianza di due rapporti.

$$a : b = c : d \text{ equivale a } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

### ESEMPIO

$$2 : 3 = 4 : 6 \text{ equivale a } \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Proprietà fondamentale delle proporzioni:

$$a : b = c : d \text{ se e solo se } a \cdot d = b \cdot c$$

il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi

### ESEMPIO

$$2 : x = 8 : 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 4 = 8 \cdot x \Leftrightarrow x = 1$$

## Percentuale

Il simbolo  $x\%$  equivale a  $\frac{x}{100}$ .

Percentuale → Frazione → Numero decimale

### ESEMPIO

$$15\% = \frac{15}{100} = 0,15$$

Definizione di percentuale      Passaggio da frazione a numero decimale

Frazione → Percentuale → Numero decimale

### ESEMPIO

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\% = 0,6$$

Definizione di percentuale  
Passaggio da una frazione a una equivalente con denominatore 100 tramite l'utilizzo della proprietà invariantiva

## Approssimazioni di numeri decimali

Approssimazione per troncamento	Approssimazione per arrotondamento
<p>Approssimare un numero <b>per troncamento</b>, arrestandosi alla <math>k</math>-esima cifra decimale, significa scrivere il numero fino alla <math>k</math>-esima cifra decimale, sopprimendo tutte le cifre successive.</p>	<p>Per approssimare un numero <b>per arrotondamento</b>, arrestandosi alla <math>k</math>-esima cifra decimale, occorre considerare la cifra immediatamente successiva (a destra) alla <math>k</math>-esima:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• se essa è minore di 5, la si trascura, insieme a tutte quelle che la seguono, lasciando la <math>k</math>-esima cifra invariata;</li> <li>• se essa è maggiore o uguale a 5, la si trascura, insieme a tutte quelle che la seguono, aumentando di una unità la <math>k</math>-esima cifra.</li> </ul>
<p><b>ESEMPIO</b> Consideriamo il numero: 3,462668</p> <p>Allora:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3,4 è l'approssimazione per troncamento alla prima cifra decimale, cioè a meno di un decimo;</li> <li>• 3,46 è l'approssimazione per troncamento alla seconda cifra decimale, cioè a meno di un centesimo.</li> </ul>	<p><b>ESEMPIO</b> Consideriamo il numero: 3,462668</p> <p>Allora:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3,5 è l'approssimazione per arrotondamento alla prima cifra decimale, cioè a meno di un decimo;</li> <li>• 3,46 è l'approssimazione per arrotondamento alla seconda cifra decimale, cioè a meno di un centesimo.</li> </ul>

# 4 B Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a ridurre le frazioni date ai minimi termini.

1  $\frac{36}{48} = \frac{36 : 12}{48 : 12} = \frac{\dots}{\dots}$        $\frac{30}{54} = \frac{30 : 6}{54 : 6} = \frac{\dots}{\dots}$   
 2  $\frac{99}{81} = \frac{99 : \dots}{81 : \dots} = \frac{\dots}{\dots}$        $\frac{45}{120} = \frac{45 : \dots}{120 : \dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Completa inserendo il simbolo opportuno (<, =, >).

3  $\frac{5}{4} \dots \frac{6}{7}$  perché  $5 \cdot 7 \dots 4 \cdot 6$   
 4  $\frac{4}{5} \dots \frac{6}{7}$  perché  $4 \cdot 7 \dots 5 \cdot 6$   
 5  $\frac{2}{22} \dots \frac{3}{33}$  perché  $2 \cdot 33 \dots 22 \cdot 3$

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a determinare le frazioni generatrici dei numeri decimali periodici indicati.

6  $3,\overline{2} = \frac{32 - \dots}{9} = \frac{\dots}{\dots}$   
 7  $1,0\overline{2} = \frac{\dots - 10}{90} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$   
 8  $4,\overline{27} = \frac{427 - 4}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

- Al numeratore: la differenza tra il numero scritto senza la virgola e la parte che precede il periodo
- Al denominatore: tanti 9 quante le cifre del periodo e tanti 0 quante quelle dell'antiperiodo

9 Completa la seguente tabella, sulla base degli esempi svolti in rosso.

Rappresentazione decimale	Rappresentazione tramite frazione ridotta ai minimi termini	Rappresentazione percentuale
0,65	$\frac{65}{100} = \frac{13}{20}$	65%
0,12	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 12\%$
0,16	$\frac{16}{100} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$	16%
1,2	.....	.....
.....	$\frac{7}{20}$	.....
.....	.....	7,5%

Conviene prima scrivere la rappresentazione percentuale e poi dedurre questo valore dalla rappresentazione in percentuale

10 Completa, in modo da ricavare il termine incognito di ciascuna proporzione.

a.  $4 : x = 6 : 12 \Rightarrow 4 \cdot 12 = 6 \cdot x \Rightarrow x = \frac{6 \cdot \dots}{\dots} = \dots$   
 proprietà fondamentale delle proporzioni

b.  $(x + 2) : x = 10 : 5 \Rightarrow 5 \cdot (x + 2) = 10 \cdot x \Rightarrow 5x + \dots = \dots \Rightarrow 5x = \dots \Rightarrow x = \dots$   
 proprietà fondamentale delle proporzioni      proprietà distributiva      risolvi come equazione, come hai imparato alla scuola media

**11** Completa le approssimazioni seguenti.

a. 1,4567 arrotondato alla 3 cifra decimale

$$\Rightarrow 1,457$$

poiché la quarta cifra decimale è 7, maggiore di 5, la terza cifra decimale va aumentata di 1

b. 1,4563 arrotondato alla 3 cifra decimale

$$\Rightarrow 1,456$$

poiché la quarta cifra decimale è 3, minore di 5, la terza cifra decimale resta invariata

c. 5,4678 arrotondato alla 2 cifra decimale

$$\Rightarrow \dots\dots\dots$$

d. 5,6433 arrotondato alla 2 cifra decimale

$$\Rightarrow \dots\dots\dots$$

**Problemi e modelli**

Completa la risoluzione dei seguenti problemi.

**12** Nel negozio Spendibene ogni articolo di abbigliamento è scontato del 20%. Marta deve acquistare una polo da 45 euro e una t-shirt da 30 euro di listino. Nel negozio Spendimeglio la polo è venduta a 35 euro e la t-shirt a 25 euro. Qual è l'acquisto più conveniente?

**Soluzione**

Quanto costa la polo nel negozio Spendibene?  $45 \text{ €} \cdot \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ €}$

Quanto costa la t-shirt nel negozio Spendibene?  $30 \text{ €} \cdot \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ €}$

Confrontando le cifre ottenute, si può dedurre che l'acquisto migliore consiste nel comprare la polo nel negozio  $\dots\dots\dots$  e la t-shirt nel negozio  $\dots\dots\dots$

**13** Un capo di abbigliamento, che costava inizialmente 150 euro, dopo uno sconto costa 120 euro. A quanto ammonta lo sconto, in percentuale?

**Soluzione**

Lo sconto che è stato praticato sul prezzo originario di 150 euro è di  $150 - 120 = 30$  (euro); per calcolare la percentuale corrispondente devi trasformare la frazione  $\frac{30}{150}$  in percentuale:

$$\frac{30}{150} = \frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{1 \cdot \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots \cdot \dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{100}$$

Utilizzando la proprietà invariantiva trasforma la frazione in una equivalente con denominatore 100

Pertanto lo sconto praticato equivale a  $\dots\dots\dots$

**14** Un capo di abbigliamento, dopo uno sconto del 30%, viene venduto a 140 euro. Qual era il prezzo prima dello sconto?

**Soluzione**

Poiché lo sconto è del 30%, il prezzo scontato equivale al 70% del prezzo  $x$  originario. Vale quindi la proporzione:  $140 : 70 = x : 100$ , da cui  $x = \dots\dots\dots$

**15** Su un capo di abbigliamento viene effettuato prima un ribasso del 10% e poi sul prezzo scontato un ulteriore ribasso del 10%. Di quale percentuale risulta scontato il prezzo finale rispetto a quello iniziale?

**Soluzione**

Indichiamo con  $p$  il prezzo originario; dopo un ribasso del 10% il prezzo diviene il 90%, quindi  $\frac{90}{100}p$ ; dopo un ulteriore ribasso del 10% il prezzo scontato diviene a sua volta il 90%, quindi diviene uguale a:

$$\frac{90}{100} \cdot \left( \frac{90}{100} p \right) = \frac{\dots\dots\dots}{100} p$$

prezzo dopo il primo sconto      prezzo dopo i due sconti

In definitiva il prezzo finale equivale all' $\dots\dots\dots$ % del prezzo originario, quindi lo sconto rispetto al prezzo iniziale è del  $\dots\dots\dots$ %.

# 4 C Esercizi da svolgere

**1** Trasforma le seguenti frazioni in frazioni decimali, cioè aventi come denominatore una potenza di 10, quando è possibile.

$$\frac{335}{40}; \frac{19}{18}; \frac{503}{500}; \frac{151}{150}; \frac{21}{20}; \frac{104}{99}; \frac{25}{4} \left[ \frac{8375}{1000}; \text{no}; \frac{1006}{1000}; \text{no}; \frac{105}{100}; \text{no}; \frac{625}{100} \right]$$

**2** Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali finiti, quando è possibile.

$$\frac{7}{20}; \frac{36}{60}; \frac{5}{42}; \frac{1}{25}; \frac{3}{5}; \frac{2}{9}; \frac{13}{1000}; \frac{27}{16}; \frac{62}{30}; \frac{8}{125}$$

[0,35; 0,6; no; 0,04; 0,6; no; 0,013; 1,6875; no; 0,064]

**3** Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

$$\frac{18}{24}; \frac{24}{18}; \frac{360}{48}; \frac{48}{360}; \frac{36}{7}; \frac{53}{22}$$

[0,75; 1,3; 7,5; 0,13; 5,142857; 2,409]

**4** Trova la frazione generatrice dei seguenti numeri decimali.

$$5,75; 5,7\bar{5}; 5,\bar{75}; 1,\bar{3}; 1,10\bar{3}; 0,0\bar{06}$$

[ $\frac{23}{4}$ ;  $\frac{259}{45}$ ;  $\frac{190}{33}$ ;  $\frac{4}{3}$ ;  $\frac{331}{300}$ ;  $\frac{1}{165}$ ]

**5** Disponi in ordine crescente i seguenti numeri decimali.

$$3,05; 3,0\bar{49}; 3,5; 3,0\bar{5}; 3,50\bar{5}; 3,0\bar{5}; 3,\bar{5}; 3,0\bar{49}$$

[3,049; 3,049; 3,05; 3,05; 3,05; 3,5; 3,505; 3,5]

**Trasforma le seguenti percentuali in frazioni.**

**6** 34%      5,7%      76,8%      98%

[ $\frac{17}{50}$ ;  $\frac{57}{1000}$ ;  $\frac{96}{125}$ ;  $\frac{49}{50}$ ]

**7** 0,25%      2,5%      12,5%      12,75%

[ $\frac{1}{400}$ ;  $\frac{1}{40}$ ;  $\frac{1}{8}$ ;  $\frac{51}{400}$ ]

**Trasforma le seguenti frazioni in percentuali.**

**8**  $\frac{1}{50}$        $\frac{33}{250}$        $\frac{68}{75}$        $\frac{18}{77}$

[2%; 13,2%; 90,67%; 23,38%]

**9**  $\frac{47}{97}$        $\frac{17}{250}$        $\frac{12}{13}$        $\frac{94}{123}$

[48,45%; 6,8%; 92,31%; 76,42%]

**10** Calcola il 17% di 2800. [476]

**11** Calcola il numero il cui 20% è 400. [2000]

**12** Quale percentuale di 8400 è 252? [3%]

**13** Completa la seguente tabella.

Rappresentazione decimale	Rappresentazione tramite frazione ridotta ai minimi termini	Rappresentazione percentuale
0,85	.....	.....
.....	$\frac{3}{25}$	.....
.....	.....	16%

**Calcola il termine incognito nelle seguenti proporzioni.**

**14**  $x : 20 = 30 : 35$        $45 : 90 = 90 : x$        $51 : 17 = x : 34$  [ $\frac{120}{7}$ ; 180; 102]

**15**  $x : \frac{63}{16} = \frac{24}{49} : \frac{4}{35}$        $\frac{51}{32} : \frac{87}{65} = \frac{13}{29} : x$        $\frac{19}{13} : x = \frac{52}{3} : \frac{52}{19}$  [ $\frac{135}{8}$ ;  $\frac{32}{85}$ ;  $\frac{3}{13}$ ]

**Determina il valore arrotondato dei seguenti numeri.**

**16**  $\frac{35}{8}$  a meno di  $10^{-2}$        $\frac{65}{12}$  a meno di  $10^{-5}$       [4,38; 5,41667]

**17**  $\frac{76}{9}$  a meno di  $10^{-4}$        $\frac{23}{25}$  a meno di  $10^{-1}$       [8,4444; 0,9]

**18**  $\frac{1673}{41}$  a meno di  $10^{-4}$        $\frac{29}{89}$  a meno di  $10^{-6}$       [40,8049; 0,325843]

**19** Quale numero ricavi se aumenti 800 del 20% e poi diminuisce del 30% il numero che ottieni? [672]

**20** Se in un rettangolo i lati sono lunghi 30 cm e 50 cm e si diminuisce il primo lato del 20% e il secondo del 10%, di quanto diminuisce l'area in percentuale? [28%]

**Problemi e modelli**

**21** In un ingranaggio di un orologio si trovano due rotelle dentate. La prima compie dodici giri in due minuti e mezzo, la seconda quindici giri in tre minuti. Quale rotella compie più giri al minuto? [La seconda rotella]

**22** Per coprire tutti i 60 tavoli di un ristorante per un ricevimento sono necessari 5 kg di petali di rosa. Quanti ne servirebbero se i tavoli triplicassero? E se i tavoli fossero 42? [15 kg; 3,5 kg]

**23** Gli ingredienti per otto crêpes sono:

- 120 g di farina 00;
- 300 ml di latte;
- 2 uova.

Controllando nella dispensa scopri di avere a disposizione 800 g di farina, 1,5 litri di latte e 9 uova. Quante crêpes puoi preparare al massimo? Quanta farina ti rimane nella dispensa? Quanto latte? Quante uova?

[36 crêpes, 150 ml di latte e 260 g di farina]



**24** Sciogli 25 g di zucchero in  $200 \text{ cm}^3$  di acqua. Esprimi con parole tue che cosa rappresenta il rapporto  $\frac{25 \text{ g}}{200 \text{ cm}^3}$ . Quanti  $\text{cm}^3$  della soluzione ottenuta contengono 1 g di zucchero?

[Il rapporto rappresenta la quantità di zucchero, espressa in grammi, contenuta in  $1 \text{ cm}^3$  di acqua.  $8 \text{ cm}^3$  di acqua contengono 1 g di zucchero]

**25** Misurando su una cartina in scala 1 : 500 000 il Cile si estende in direzione Nord-Sud per 9,2 cm. Quanto sarà la lunghezza del Cile su una cartina 1 cm : 17 000 000 cm? [Circa 0,27 cm]

**26** La superficie italiana è  $301\,340 \text{ km}^2$ . Il 2,4% della superficie è occupato dalle acque. Quanto si estende la superficie occupata dalle acque? La superficie della Terra è  $5,1 \cdot 10^8 \text{ km}^2$ , qual è la percentuale corrispondente alla superficie occupata dall'Italia? [7232,16  $\text{km}^2$ ; circa 0,06%]

**27** Sperimentando un farmaco su un campione A di 55 persone si osserva che 40 di loro sono guarite dalla patologia che si voleva curare. Sperimentando un farmaco diverso su un campione B di 40 pazienti si è osservato che 31 di questi sono guariti dalla stessa patologia. Calcola la percentuale di guarigione dei pazienti nei due casi; quale farmaco ritieni più efficace?

[Campione A: circa 72,7%; campione B: 77,5%; è più efficace il farmaco sperimentato sul campione B]

**28** Un'azienda ha prodotto fino a due anni fa 7 tonnellate di alluminio. Lo scorso anno ha incrementato la produzione del 7%, quest'anno però l'ha diminuita del 7%. Ogni percentuale è calcolata relativamente alla produzione dell'anno precedente. Quante tonnellate di alluminio ha prodotto quest'anno l'azienda? Quanto è variata in percentuale la produzione negli ultimi due anni?

[6,9657 tonnellate; è diminuita dello 0,49%]

**29** Sull'etichetta di una bevanda al gusto di frutta leggi che contiene il 7,5% di succo di arancia; se la bottiglia contiene tre quarti di litro, quanti millimetri di succo di arancia sono contenuti nella bottiglia? [56,25 ml]

### Numero razionale assoluto

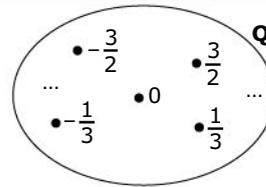
Insieme di tutte le frazioni equivalenti a una frazione data.

**ESEMPI**

$\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{15}{12}$  sono rappresentazioni diverse dello stesso numero razionale definito dall'insieme  $\left\{ \frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{15}{12}, \dots \right\}$

### Insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali

Insieme costituito dal numero zero e da tutti i numeri che si ottengono associando a ciascun numero razionale assoluto due numeri, uno **positivo** preceduto dal segno + e uno **negativo** preceduto dal segno -.



## Operazioni tra numeri razionali assoluti, espressi da frazioni

Operazione	Come è definita	ESEMPI
Addizione e sottrazione	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(\text{m.c.m.}(b,d) : b) \cdot a \pm (\text{m.c.m.}(b,d) : d) \cdot c}{\text{m.c.m.}(b,d)}$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{12} = \frac{13}{12}$
Moltiplicazione	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{18}$
Divisione	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ — Reciproco di $\frac{c}{d}$	$\frac{1}{5} : \frac{3}{2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

## Operazioni tra numeri razionali (relativi)

Le regole di calcolo tra numeri razionali assoluti si estendono nell'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali, applicando le stesse regole dei segni viste in  $\mathbb{Z}$ .

**ESEMPI**

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{-4 + 3}{12} = -\frac{1}{12} \quad \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{5}{2}\right) = -\frac{15}{8} \quad \left(-\frac{3}{4}\right) : \left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) = +\frac{3}{10}$$

Si trasforma in moltiplicazione, scrivendo il reciproco del divisore

## Potenze nell'insieme dei numeri razionali

Le potenze con esponente positivo o nullo sono definite nell'insieme dei numeri razionali in modo analogo a quanto visto in  $\mathbb{Z}$ ; in  $\mathbb{Q}$  si definiscono anche le potenze con esponente negativo.

Potenza a esponente intero negativo	ESEMPI
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ con $a \neq 0, n \in \mathbf{N} - \{0\}$	<p style="color: red;">Esponente opposto</p> $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-3\right)^{+3} = -27 \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ <p style="color: blue;">Base reciproca</p>

# 5 B Esercizi guidati

**1** Nelle seguenti tabelle esegui le operazioni indicate, seguendo i passi descritti nella prima colonna e l'esempio svolto nella seconda colonna.

Passi del procedimento	$\frac{5}{12} - \frac{4}{15}$	$\frac{2}{15} + \frac{7}{35}$	$\frac{7}{6} - \frac{2}{3}$
Calcola il <i>minimo comune multiplo</i> dei denominatori delle frazioni.	m.c.m.(12, 15) = 60	.....	.....
Applica la regola relativa alla sottrazione (questo passaggio di solito si fa mentalmente).	$\frac{5}{12} - \frac{4}{15} = \frac{(60 : 12) \cdot 5 - (60 : 15) \cdot 4}{60} =$	.....	.....
Esegui i calcoli al numeratore della frazione scritta al passo precedente.	$= \frac{25 - 16}{60} = \frac{9}{60} =$	.....	.....
Se è possibile, riduci la frazione ottenuta ai minimi termini.	$= \frac{3}{20}$	.....	.....

Passi del procedimento	$\left(-\frac{36}{15}\right) \cdot \left(-\frac{35}{16}\right)$	$\left(+\frac{9}{25}\right) \cdot \left(+\frac{35}{12}\right)$	$\left(+\frac{24}{25}\right) \cdot \left(-\frac{35}{42}\right)$
Come in Z, il prodotto di due numeri razionali ha <i>segno</i> uguale a quello che si ottiene applicando la regola dei segni e <i>valore assoluto</i> uguale al prodotto dei valori assoluti.	$= + \left(\frac{36}{15} \cdot \frac{35}{16}\right) =$	.....	.....
Se possibile, semplifica «in croce».	$= + \left(\frac{36^9}{25_5} \cdot \frac{35^7}{16_4}\right) =$	.....	.....
Moltiplica i numeratori e i denominatori.	$= + \frac{9 \cdot 7}{5 \cdot 4} = + \frac{63}{20}$	.....	.....

Passi del procedimento	$\left(-\frac{6}{25}\right) : \left(+\frac{16}{35}\right)$	$\left(-\frac{8}{20}\right) : \left(-\frac{6}{25}\right)$	$\left(+\frac{22}{25}\right) : \left(+\frac{33}{10}\right)$
Come in Z, il quoziente di due numeri razionali ha <i>segno</i> uguale a quello che si ottiene applicando la regola dei segni e <i>valore assoluto</i> uguale al quoziente dei valori assoluti.	$= - \left(\frac{6}{25} : \frac{16}{35}\right) =$	.....	.....
Trasforma la divisione in moltiplicazione per il reciproco.	$= - \left(\frac{6}{25} \cdot \frac{35}{16}\right) =$	.....	.....
Se possibile, semplifica «in croce» ed esegui la moltiplicazione.	$= - \left(\frac{6^3}{25_5} \cdot \frac{35^7}{16_8}\right) = - \frac{21}{40}$	.....	.....

**Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a calcolare alcune potenze.**

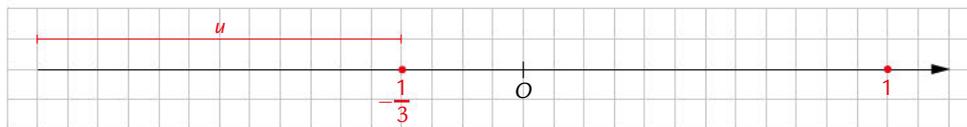
**2**  $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = + \dots$        $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = - \dots$        $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \dots$        $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \dots$

**3**  $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{\dots}{\dots}\right)^2 = \dots$        $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = + \frac{1}{\dots}$        $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-\dots)^3 = - \dots$        $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3} = \dots$

## Lezione 5 Insieme $\mathbb{Q}$ e operazioni in $\mathbb{Q}$

**4** Rappresenta sulla retta orientata i seguenti numeri razionali:

$-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{4}, +\frac{7}{12}, +\frac{3}{4}, +1$ . Alcuni numeri sono rappresentati come esempio.



**5** Completa la seguente tabella, inserendo Sì/No nella seconda colonna e inserendo l'eventuale risultato corretto nella terza colonna.

Uguaglianza	È corretta?	Eventuale correzione
$2^{-10} = (-10)^2$	No	$2^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
$2^{-10} \cdot 2^{-2} = 2^{-12}$	.....	.....
$(2^{-3})^{-2} = 2^6$	.....	.....
$(2^{-8} + 2^{-6}) : 2^{-4} = 2^{-12} + 2^{-2}$	.....	.....

**6** Completa la seguente tabella, sulla base dell'esempio svolto nella seconda riga.

$a$	$b$	$(a+b)^2$	$(a-b)^3$	$a^2 + b^2$	$a^{-3} + b^{-3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 =$ $= \left(\frac{3+2}{6}\right)^2 =$ $= \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^3 =$ $= \left(\frac{3-2}{6}\right)^3 =$ $= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} =$ $= \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$ $= 2^3 + 3^3 =$ $= 8 + 27 = 35$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	.....	.....	.....	.....
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	.....	.....	.....	.....

**Problemi e modelli** Completa la risoluzione dei seguenti problemi.

**7** L'aria è composta per i  $\frac{39}{50}$  da azoto e per i  $\frac{21}{100}$  da ossigeno. Quale frazione rappresenta gli altri gas? Quanti  $\text{dm}^3$  di ossigeno ci sono in una stanza di  $60 \text{ m}^3$ ?

**Soluzione**

Scrivi e semplifica l'espressione che ti permette di trovare la frazione che rappresenta i gas rimanenti. ....

Quanti  $\text{dm}^3$  di ossigeno ci sono in  $1 \text{ m}^3$  di aria? .....

Scrivi ed esegui il calcolo necessario a trovare quanti  $\text{dm}^3$  di ossigeno ci sono nella stanza.

$$\left[ \frac{1}{100}; 12\,600 \text{ dm}^3 \right]$$

**8** Si aggiungono 800 g di cemento in un secchio che ne contiene già 3000 g. Di quanto aumenta il volume occupato dal cemento nel secchio, sapendo che 2,4 g di cemento occupano  $1 \text{ cm}^3$ ?

**Soluzione**

Poiché 2,4 g occupano  $1 \text{ cm}^3$ , 800 g occuperanno  $\frac{800}{2,4} \text{ cm}^3 \simeq \dots \text{ cm}^3$  (arrotonda il risultato alla prima cifra decimale). Quindi il volume occupato dal cemento aumenta di .....

## FOCUS SUGLI ERRORI

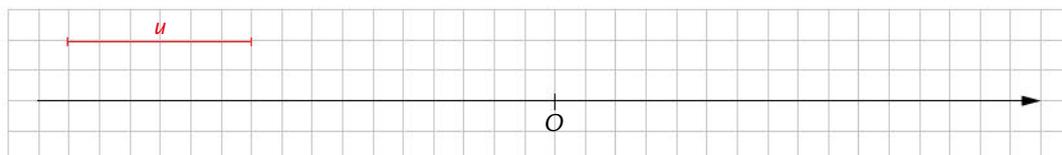
Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
confondere l'opposto di un numero con il suo reciproco	1. l'opposto di 3 è $\frac{1}{3}$ 2. il reciproco di $-\frac{2}{5}$ è $\frac{2}{5}$ <b>Errato!</b>	1. l'opposto di 3 è $-3$ 2. il reciproco di $-\frac{2}{5}$ è $-\frac{5}{2}$ <b>Corretto</b>
eseguire le addizioni sommando i numeratori e i denominatori	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{5+7} = \frac{5}{12}$ <b>Errato!</b>	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$ <b>Corretto</b>
dimenticare di ridurre le frazioni ai minimi termini prima di eseguire le operazioni (non è un errore ma complica i calcoli)	$\frac{16}{18} + \frac{5}{9} = \frac{16+10}{18} = \frac{26}{18}$ <b>Non conveniente</b>	$\frac{16}{18} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$ <b>Corretto</b>
calcolare il denominatore comune tra frazioni moltiplicando i loro denominatori, anziché scegliere il loro m.c.m. (non è un errore ma complica i calcoli)	$\frac{3}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{54 \cdot 3 + 24 \cdot 2 - 36}{216} = \frac{174}{216}$ <b>Non conveniente</b>	$\frac{3}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{9 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 6}{36} = \frac{29}{36}$ <b>Corretto</b>
semplificare in modo scorretto le frazioni, quando si eseguono addizioni	$\frac{2+\cancel{3}}{\cancel{9}} = \frac{2+1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ <b>Errato!</b>	$\frac{2+3}{9} = \frac{5}{9}$ <b>Corretto</b>
confondere il segno della base di una potenza con il segno del suo esponente, quando l'esponente è negativo	1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{8}{27}$ 2. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = -\frac{9}{4}$ <b>Errato!</b>	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ <b>Corretto</b>
eseguire in modo errato le divisioni di potenze con la stessa base, quando l'esponente del divisore è negativo	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-9}$ <b>Errato!</b>	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5-(-4)} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2$ <b>Corretto</b>

**1** Disponi in ordine crescente i seguenti numeri razionali:

$$-\frac{5}{2} \quad +\frac{3}{4} \quad -2 \quad -\frac{2}{3} \quad +\frac{1}{2} \quad -\frac{4}{5} \quad +\frac{1}{4} \quad +1 \quad +\frac{4}{3} \quad +\frac{8}{7}$$

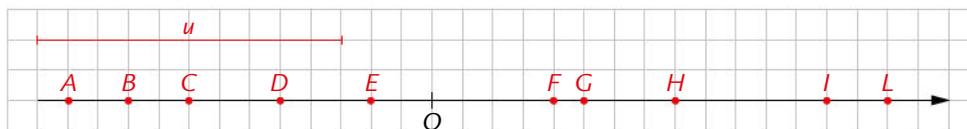
**2** Rappresenta sulla retta orientata i seguenti numeri razionali:

$$-\frac{3}{2} \quad +\frac{7}{3} \quad +\frac{5}{6} \quad -2 \quad 0 \quad +\frac{5}{2} \quad -\frac{8}{3} \quad +\frac{1}{3} \quad +\frac{11}{6}$$



## Lezione 5 Insieme $\mathbb{Q}$ e operazioni in $\mathbb{Q}$

**3** Associa a ogni punto indicato il numero razionale corrispondente.



Completa inserendo il simbolo corretto (<, =, >).

**4**  $-\frac{8}{5} \dots \frac{11}{7}$ ;  $-\frac{8}{5} \dots -\frac{11}{7}$ ;  $\frac{8}{5} \dots \frac{11}{7}$       **6**  $\frac{20}{31} \dots \frac{30}{47}$ ;  $-\frac{20}{31} \dots -\frac{30}{47}$ ;  $\frac{70}{56} \dots \frac{65}{52}$   
**5**  $\frac{8}{5} \dots -\frac{11}{7}$ ;  $\frac{20}{31} \dots -\frac{30}{47}$ ;  $-\frac{20}{31} \dots \frac{30}{47}$       **7**  $\frac{70}{56} \dots -\frac{65}{52}$ ;  $-\frac{70}{56} \dots -\frac{65}{52}$ ;  $-\frac{70}{56} \dots \frac{65}{52}$

**8** Completa in modo da ottenere uguaglianze corrette.

$$\left(-\frac{5}{9}\right) \cdot (\dots) = -\frac{2}{3} \quad (\dots) : \left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{2}{15} \quad \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot (\dots) = -100$$

**9** Completa la seguente tabella.

<b>a</b>	$-\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
<b>b</b>	0	1	-1	2	-2
<b>c</b>	-6	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	+4	$-\frac{1}{2}$
<b>a + b</b>	.....	.....	.....	.....	.....
<b>(a + b) · c</b>	.....	.....	.....	.....	.....
<b>(a + b) : c</b>	.....	.....	.....	.....	.....
<b>a<sup>b</sup></b>	.....	.....	.....	.....	.....
<b>c<sup>b</sup></b>	.....	.....	.....	.....	.....
<b>a<sup>b</sup> - c<sup>b</sup></b>	.....	.....	.....	.....	.....

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

**10**  $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\right] \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{7}{6}$  [1]

**11**  $\left[\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right] \left(-\frac{3}{14}\right) + \frac{7}{8}$   $\left[\frac{1}{2}\right]$

**12**  $\left[\left(-\frac{6}{5}\right)\left(+\frac{25}{9}\right) - \frac{1}{2}\right] : \left(-\frac{46}{9}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$  [2]

**13**  $\left[0,\bar{6} \cdot \left(2 - \frac{4}{5}\right) - \left(1 - \frac{2}{5} - 0,25\right) \cdot \frac{4}{7}\right] : 1,8$   $\left[\frac{1}{3}\right]$

**14**  $\left[\left(-\frac{5}{7}\right) : \left(-\frac{30}{21}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] : \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right)\right]$  [-4]

**15**  $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{5}\right) : \left(-\frac{19}{15}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) : \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{16}{5} + \frac{3}{10}\right) : \left(-\frac{7}{4}\right)$  [-1]

**16**  $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{13}{21} - \frac{11}{14}\right) : \left\{-\frac{17}{15} + \frac{3}{7} \cdot \left[\frac{4}{5} - \frac{3}{62} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{10} - \frac{1}{15}\right)\right]\right\} - \frac{2}{35} \cdot \left(\frac{9}{4} - 4\right)$   $\left[\frac{4}{5}\right]$

**17**  $\left\{\left[-\frac{21}{52} \cdot \left(\frac{65}{84} + \frac{91}{28} + \frac{13}{42}\right) - \frac{25}{6} \cdot \frac{11}{35} : \left(-\frac{10}{7}\right)\right] : \left(4 - \frac{21}{4}\right) - \frac{1}{12}\right\} \cdot \left(\frac{10}{7} - 2\right)$   $\left[-\frac{1}{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando, ovunque possibile, le proprietà delle potenze.

**18**  $[(10^5 \cdot 10^4) : (10^4)^2]^{-2}$   $\left[\frac{1}{100}\right]$  **20**  $\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{2^{-1} - 3^{-1}}$  [5]

**19**  $\{[(10^3 \cdot 10^4)^{-2} \cdot (10^2)^{10}] : 10^5\}^{-1}$   $\left[\frac{1}{10}\right]$  **21**  $(2^{-1} - 5^{-1})\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$  [-15]

**22**  $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^4$   $\left[\frac{1}{4}\right]$

**23**  $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^7 : \left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]$   $\left[\frac{1}{9}\right]$

**24**  $\left[\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) - \frac{1}{8}\right] \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$   $\left[\frac{3}{4}\right]$

**25**  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} : \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{26} + \frac{5}{39}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$   $\left[\frac{11}{4}\right]$

**26**  $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{11} : \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right] + \left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^6\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2\right\}^{-1}$  [-7]

**27**  $\left\{\left[\left(3 - \frac{8}{3}\right)^{-4}\right]^{-3} \cdot \left(-2 + \frac{5}{3}\right)^{-2}\right\} : \left[\left(7 - \frac{20}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2$   $\left[\frac{1}{9}\right]$

**28**  $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(-1 - \frac{2^{-1}}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{2} - 2\right)^3\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left[1 + \left(\frac{6}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}$   $\left[-\frac{11}{2}\right]$

**Problemi e modelli**

**29** Il proprietario di un terreno di 12 500 m<sup>2</sup> destina  $\frac{3}{10}$  della proprietà alla coltivazione del grano,  $\frac{1}{5}$  a vigneto e il rimanente a frutteto. Quanti m<sup>2</sup> sono destinati al frutteto? [6250 m<sup>2</sup>]

**30** Un commerciante ha acquistato 840 kg di merce pagandola complessivamente 2100 euro. Se vuole realizzare un guadagno uguale a  $\frac{1}{5}$  della spesa, a quanto deve vendere 1 kg di quella merce? [3 euro]

**31** Si deve dividere un listello di legno di 140 cm in due parti di cui una sia  $\frac{2}{5}$  dell'altra. Quanto deve essere lunga ciascuna parte? [40 cm e 100 cm]

**32** L'angström (Å) è un'unità di misura uguale a  $1 \cdot 10^{-10}$  m. Calcola la misura in metri del diametro di un globulo rosso, sapendo che vale  $8 \cdot 10^4$  Å. [ $8 \cdot 10^{-6}$  m]

**33** I signori Rossi abitano nell'appartamento di loro proprietà, intestato per metà a ciascuno dei due. Poiché hanno tre figli, alla morte del signor Rossi la moglie eredita  $\frac{1}{3}$  della proprietà del marito e ciascun figlio  $\frac{1}{3}$  del rimanente. Quale frazione dell'appartamento risulta di proprietà della moglie? Quale di proprietà di ciascun figlio?

Uno dei figli vende la sua quota in parti uguali alla madre e agli altri due fratelli. Dopo la vendita, qual è la parte della madre? Quale quella di ciascuno degli altri due figli?  $\left[\frac{2}{3}; \frac{1}{9}; \frac{19}{27}; \frac{4}{27}\right]$

**34** Giovanni ha acquistato un terreno pagando alla consegna 6000 €, cioè  $\frac{3}{10}$  del suo prezzo, e il resto in rate da 1750 € l'una. Con quante rate estinguerà il suo debito? [8]

**35** La massa della stella Sirio A è  $4,284 \cdot 10^{30}$  kg e la massa del Sole è  $1,9891 \cdot 10^{30}$  kg. Quante volte è maggiore la massa di Sirio A rispetto a quella del Sole? [Circa 2,15 volte più grande]